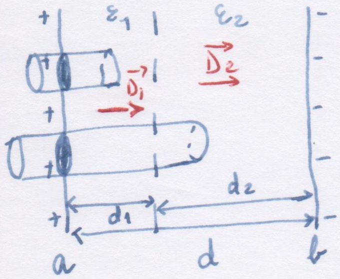
$9^{\underline{a}}$ AULA PRÁTICA

$\boxed{87}$ Os dois dieléctricos são LHI e não estão electrizados em volume ($\rho = 0$)

$\Rightarrow \rho' = 0$ (não existem cargas eléctricas de polarização em volume)

CONDENSADOR A



Supõe-se a armadura da esquerda positiva e

$$\sigma = \frac{q}{S}$$ é a densidade uniforme existente

Na armadura da direita existe uma densidade simétrica $-\sigma < 0$.

~ Apliquemos o Teorema de Gauss

$$\oint (\vec{D}\cdot\vec{n})\, ds = \sum q_{int}$$

Consideremos os dois cilindros e as suas cargas verdadeiras

$$D_1\, ds = \sigma\, ds \qquad\qquad D_2\, ds = \sigma\, ds$$

$$\Rightarrow \quad D_1 = D_2 = \sigma$$

O vector deslocamento eléctrico tem a mesma intensidade nos dois meios

~ Por outro lado, o campo electroestático $\vec{E}$ é diferente nos dois meios

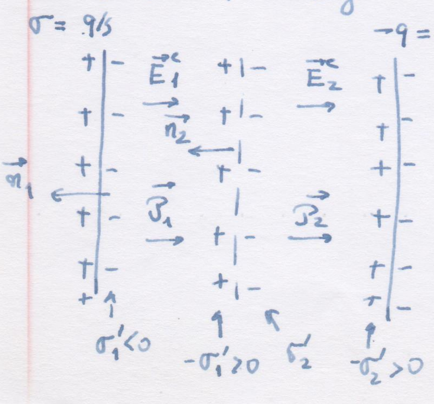
$$E^e_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \qquad \text{e} \qquad E^e_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

~ A diferença de potencial entre as armaduras é

$$V_a - V_b = \int_a^b (\vec{E}^e\cdot d\vec{p}) = \int_0^{d_1} E^e_1\, dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} E^e_2\, dx$$

$$V_a - V_b = E^e_1 d_1 + E^e_2 d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2} d_2 = \frac{q}{\varepsilon_1 S} d_1 + \frac{q}{\varepsilon_2 S} d_2$$

~ Densidades de carga de polarização



$\sigma' = (\vec{P}\cdot\vec{n})$ com $\vec{n}$ dirigido para fora do dieléctrico;

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}^e$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$$

$$\varepsilon_0 \chi_e = \varepsilon - \varepsilon_0$$

$$\sigma'_1 = (\vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\vec{E}^e_1 \cdot \vec{n}_1) = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\,|\vec{E}^e_1|$$

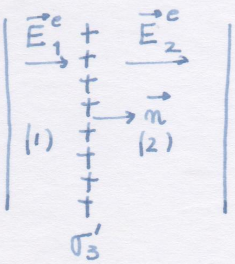
$$\sigma'_2 = (\vec{P}_2 \cdot \vec{n}_2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)(\vec{E}^e_2 \cdot \vec{n}_2) = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\,|\vec{E}^e_2|$$

$$\vec{n}_1 \uparrow\downarrow \vec{P}_1 \qquad \vec{n}_2 \uparrow\downarrow \vec{P}_2$$

$$\sigma'_1 = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma \qquad \sigma'_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma$$

Na superfície de separação dos dois dieléctricos existe a densidade de carga de polarização

$$\sigma'_3 = -\sigma'_1 + \sigma'_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\varepsilon_0 \sigma$$



~ Nota — Pode-se obter este resultado usando a relação de descontinuidade

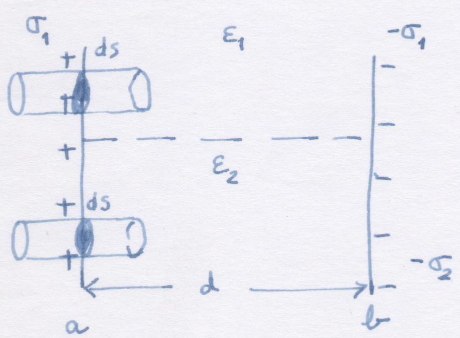
$$E^e_{2n} - E^e_{1n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\varepsilon_0}$$

na superfície de separação dos dois dieléctricos

$$E^e_2 - E^e_1 = \frac{\sigma'_3}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma'_3 = \varepsilon_0 (E^e_{2n} - E^e_{1n}) = \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_2} - \frac{\sigma}{\varepsilon_1}\right) = \varepsilon_0 \sigma \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right)$$

CONDENSADOR B



Repare que a ddp entre as armaduras é uma constante, pois cada uma delas é um condutor em equilíbrio electrostático e, atendendo a que se verifica

$$V_a - V_b = E^e d,$$

o campo electrostático é o mesmo nos dois meios. Ter-se-á

$$E^e = \frac{D_1}{\varepsilon_1} \quad \text{e} \quad E^e = \frac{D_2}{\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sigma_1$$

A carga total na armadura da esquerda é

$$q = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \sigma_1 S_1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sigma_1\right) S_2 = \sigma_1\left(S_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} S_2\right)$$

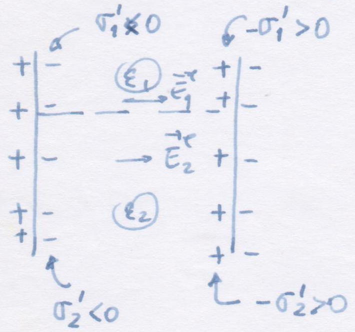
donde se obtém

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1 q}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} \Rightarrow q_1 = \sigma_1 S_1 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} q$$

e

$$q_2 = \sigma_2 S_2 = \frac{\varepsilon_2 S_2}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2} q$$

verificando-se $q_1 + q_2 = q$.

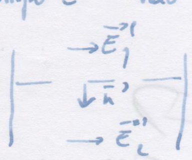


As densidades de carga de polarização são

$$\sigma'_1 = (\vec{P}'_1 \cdot \vec{n}_1) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\vec{E}^e \cdot \vec{n}_1)$$
$$= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E^e = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\sigma_1$$

$$\sigma'_2 = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\varepsilon_2}\sigma_2$$

Na superfície de separação dos dois dieléctricos tem-se $\sigma'_3 = 0$ pois o campo $\vec{E}^e$ não tem componente normal

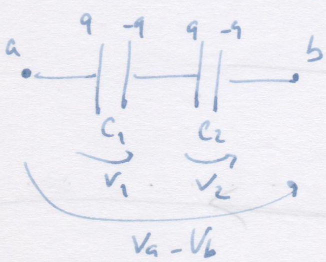


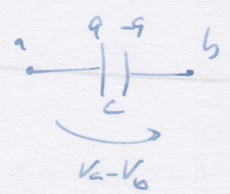
$$E^e_{2n} - E^e_{1n} = \frac{\sigma'_3}{\varepsilon_0} = 0$$

(b) CONDENSADOR A

$$V_a - V_b = \frac{q}{\varepsilon_1 S} d_1 + \frac{q}{\varepsilon_2 S} d_2 = \frac{q}{C}$$

Com $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ Sendo $C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1}$ $C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}$

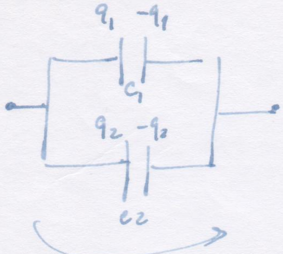


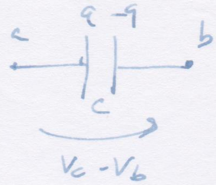


$V_a - V_b = V_1 + V_2$

Associação em série

CONDENSADOR B





$$q = q_1 + q_2$$

$$q = q_1 + q_2 = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = D_1 S_1 + D_2 S_2 = \varepsilon_1 E^e S_1 + \varepsilon_2 E^e S_2$$

$$= \varepsilon_1 \frac{V_a - V_b}{d} S_1 + \varepsilon_2 \frac{V_a - V_b}{d} S_2 = C\,(V_a - V_b)$$

$C = C_1 + C_2$ sendo $C_1 = \dfrac{\varepsilon_1 S_1}{d}$ $\quad C_2 = \dfrac{\varepsilon_2 S_2}{d}$

Associação em paralelo

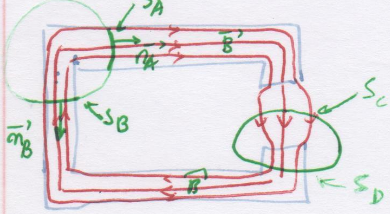
$\boxed{163}$ Admite-se que o circuito magnético constitui um "tubo de linhas de força" perfeito.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \oiint (\vec{B} \cdot \vec{n})\, ds = 0$$

$$\iint_{S_A} (\vec{B} \cdot \vec{n}_A)\, ds + \iint_{S_B} (\vec{B} \cdot \vec{n}_B)\, ds = 0$$

$$\vec{n} = \vec{n}_A = -\vec{n}_B$$

$$\iint_{S_A} (\vec{B} \cdot \vec{n})\, ds - \iint_{S_B} (\vec{B} \cdot \vec{n})\, ds = 0 \Rightarrow \Phi_A = \Phi_B$$



Do mesmo modo

$$\Phi_C = \Phi_D$$

Repare que o fluxo ~~de quaisquer~~ de qualquer secção recta do circuito é uma constante, logo o campo de indução magnética será diferente sempre que a secção variar

$$\phi = \iint (\vec{B} \cdot \vec{n})\, ds = C^{te}$$

$$\Rightarrow \frac{\phi}{\mu_r \mu_0 S_2}\left(2l'_2 + l'_1 - \delta\right) + \frac{\phi}{\mu_0 S_2}\delta + \frac{\phi}{\mu_r \mu_0 S_1} l'_1 = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r (N_1 i_1 - N_2 i_2)}{\frac{2l'_2 + l'_1 - \delta}{S_2} + \frac{\mu_r \delta}{S_2} + \frac{l'_1}{S_1}} \qquad S_1 = 20\,cm^2 \quad S_2 = 10\,cm^2$$

$$\phi = -\frac{32\pi \times 10^{-5}}{(2 - 10^{-3}) + 8 + 0.275} = -9.785 \times 10^{-5}\ Wb$$

$\Rightarrow$

$\bar{B}_1 = -4.893 \times 10^{-2}\ T \qquad \bar{B}_2 = -9.785 \times 10^{-2}\ T$

$\bar{H}_1 = -4.867\ A\,m^{-1} \qquad \bar{H}_{2Fe} = -9.733\ A \cdot m^{-1}$

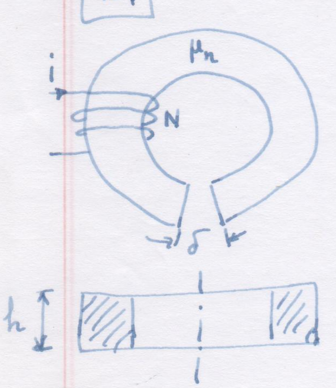
$\bar{H}_{2ar} = -7.787 \times 10^{4}\ A\,m^{-1}$

(c) Fluxo através do enrolamento (1) é

$$\Phi_1 = N_1 \phi = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$$

$$\Rightarrow L_{12} = -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2}{\frac{2l'_2 + l'_1 - \delta}{S_2} + \frac{\mu_r \delta}{S_2} + \frac{l'_1}{S_1}} = -2.935 \times 10^{-2}\ H$$

$\boxed{164}$



(a) Coeficiente de auto-indução (sem entreferro)

$$\Phi^{(1)} = (R_2 - R_1)\, h\, \bar{B} = \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} B(r)\, dr\, dz$$

O cálculo de $B(r)$ faz-se com o T. Ampère

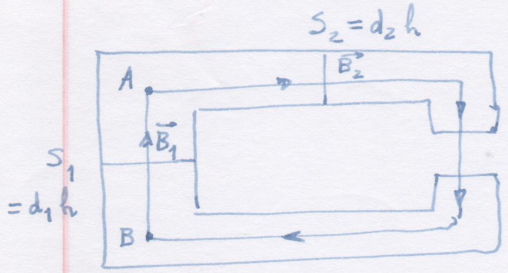
$$H(r)\, 2\pi r = N i \Rightarrow H(r) = \frac{Ni}{2\pi r}$$

$$B(r) = \mu H(r) = \mu \frac{N i}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \phi = N \phi^{(1)} = \frac{N^2 \mu i}{2\pi} \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}\, dz = \frac{N^2 \mu i}{2\pi} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Desprezando a variação do campo $\vec{B}$ segundo a direcção transversal do circuito, admitindo que o valor de $\vec{B}$ em diferentes pontos é igual ao valor que ele toma sobre a linha de força média,

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{\phi}}{S_1} \qquad \vec{B}_2 = \frac{\vec{\phi}}{S_2}$$



No troço de secção S_1:

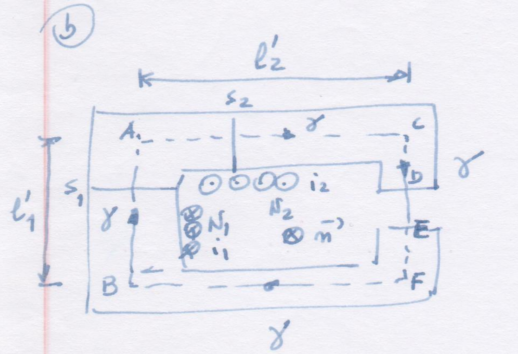
$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_r \mu_0} = \frac{\vec{\phi}}{\mu_r \mu_0 S_1}$$

No troço da secção S_2:

$$\vec{H}_{2Fe} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_r \mu_0} = \frac{\vec{\phi}}{\mu_r \mu_0 S_2}$$

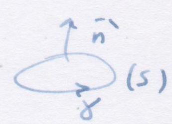
$$\vec{H}_{2ar} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} = \frac{\vec{\phi}}{\mu_0 S_2}$$

b)



$$\text{rot}\, \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} \cdot d\vec{p}) = \sum_{(S)} i$$



$$H_{2Fe}\,\overline{AC} + H_{2Fe}\,\overline{CD} + H_{2ar}\,\overline{DE} + H_{2Fe}\,\overline{EF} + H_{2Fe}\,\overline{FB}$$

$$+ H_{1Fe}\,\overline{AB} = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$H_{2Fe}\left(\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{FB}\right) + H_{2ar}\,\overline{DE} + H_{1Fe}\,\overline{AB} = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$H_{2Fe}\left(2 l'_2 + l'_1 - \delta\right) + H_{1Fe}\, l'_1 = N_1 i_1 - N_2 i_2$$
$$+ H_{2ar}\,\delta$$

$$l'_1 = l_1 - d_2 = 55 \text{ cm}$$

$$l'_2 = l_2 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} = 72.5 \text{ cm}$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

(b) Com entreferro

$$\oint_\gamma \left(\vec{H} \cdot d\vec{l}\right) = N i$$

$$H_{Fe}(r)(2\pi r - \delta) + H_{Ar}(r)\delta = N i$$

mas

$$H_{1,Fe}(r) = \frac{B_1(r)}{\mu_r \mu_0} \qquad H_{2,ar}(r) = \frac{B_2(r)}{\mu_0}$$

Conservação do fluxo $\phi_A = \phi_B \Rightarrow B_1 = B_2$

$$\frac{B(r)}{\mu_r \mu_0}(2\pi r - \delta) + \frac{B(r)}{\mu_0}\delta = N i$$

$$B(r) = \frac{N i \mu_0 \mu_r}{\frac{2\pi r - \delta}{\cancel{\mu_r}} + \mu_r \delta} =$$

$$\phi = N\phi^{(1)} = N \int_0^h \int_{R_1}^{R_2} B(r)\, dr\, dz = \mu_0 \mu_r N^2 i h \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r - \delta + \mu_r \delta}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h i}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r - \frac{\delta}{2\pi} + \frac{\mu_r}{2\pi}\delta} = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h i}{2\pi} \ln\left(\frac{2\pi R_2 + \delta(\mu_r - 1)}{2\pi R_1 + \delta(\mu_r - 1)}\right)$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{2\pi R_2 + \delta(\mu_r - 1)}{2\pi R_1 + \delta(\mu_r - 1)}\right)}$$

— Se usarmos o valor médio então

$$\bar{B} = \frac{\mu N i}{2\pi r_0} \qquad \text{onde } r_0 = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$\cancel{\phi = N\phi^{(1)} = N \bar{B} \iint dS =}$$

O valor a usar aqui é

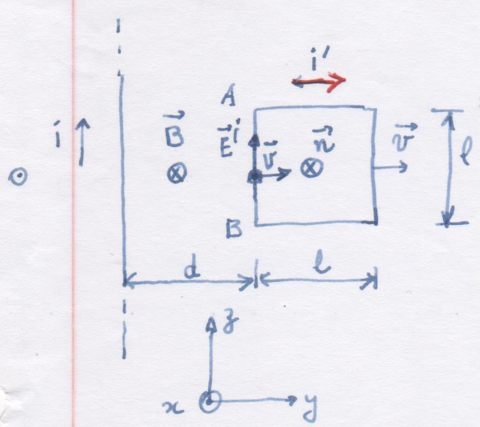
$$\bar{B} = \frac{N \mu_0 \mu_r i}{2\pi r_0 - \delta + \mu_r \delta}$$

$$\phi = N \bar{B} \iint ds = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r i}{2\pi r_0 + \delta(\mu_r - 1)} (R_2 - R_1) h$$

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h (R_2 - R_1)}{2\pi r_0 + \delta(\mu_r - 1)}}$$

10ª AULA PRÁTICA

174



$\vec{n} = -\vec{u}_x$

ⓐ Fluxo $\Phi(t)$ através da espira

$$\phi(t) = \iint \left(\vec{B}(t) \cdot \vec{n}\right) ds$$

$$\phi(t) = \iint \frac{\mu_0 i}{2\pi y} \left(-\vec{u}_x \cdot -\vec{u}_x\right) ds$$

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{y=d+vt}^{d+l+vt} \int_0^{l} \frac{dy\, dz}{y}$$

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l+vt}{d+vt}\right)$$

ⓑ Campo induzido no lado AB, $\vec{E}^i(t)$.

$$\vec{E}^i(t) = \left[\vec{v} \times \vec{B}\right] = |\vec{v}|\,|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i v}{2\pi(d+vt)} \vec{u}_z$$

v é a velocidade da espira

ⓒ Corrente i' induzida na espira, usando dois processos

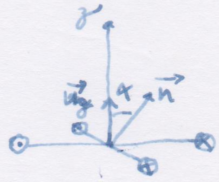
$$\mathcal{E}^i(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 i l^2 v}{2\pi(d+l+vt)(d+vt)}$$

ora $i' = \dfrac{\mathcal{E}^i}{R} \Rightarrow i' = \dfrac{\mu_0 i l^2 v}{2\pi R (d+l+vt)(d+vt)}$

158 Duas espiras de raios R_1 e R_2

$R_1 \ll R_2$ (Esta condição assegura que no centro da espira 1 o campo magnético criado pela espira 2 é bem constante e orientado perpendicular ao circuito 2). Já vimos que o campo de indução magnética é

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2R_2}\vec{u_z}$$



do campo de (C_2)

O fluxo através do circuito C_1 é dado por

$$\Phi_{(C_1)} = \iint_{(S_1)} (\vec{B}\cdot\vec{n})\, ds = \iint_{(S_1)} \frac{\mu_0 i_2}{2R_2}\cos\alpha\, ds$$

$$\Phi_{(C_1)} = \frac{\mu_0 i_2}{2R_2}\cos\alpha \iint_{(S_1)} ds = \frac{\mu_0 i_2}{2R_2}\cos\alpha\, \pi R_1^2$$

$$\Phi_{(C_1)} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{2R_2}\cos\alpha\; i_2$$

Em geral

$$\Phi_{(C_1)} = L_{11} I_1 + M_{12} I_2$$

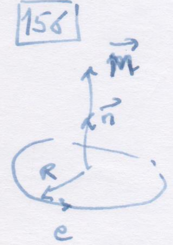
e $$\Phi_{(C_2)} = M_{21} I_1 + L_{22} I_2$$

Demonstra-se que $M_{21} = M_{12} = M$ ← coeficiente de inductância mútua dos dois circuitos em presença (C_1) e (C_2). Só depende da geometria e das posições relativas dos dois circuitos. Exprime-se em Henry.

$$M = L_M = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{2R_2}\cos\alpha$$

8ª semana

156



a) Por definição de corrente eléctrica, uma carga descrevendo uma curva fechada n vezes por segundo é equivalente a uma corrente $I = n e$

Ora $v = \omega R = 2\pi n R$

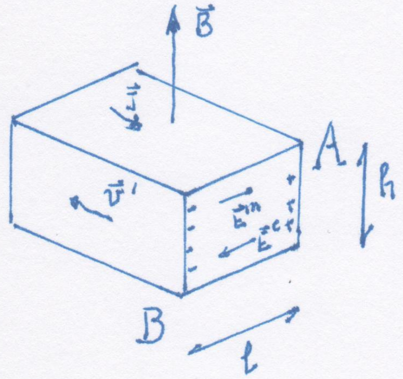
$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{e v}{2\pi R} = \frac{e\omega}{2\pi}}$$

b) Como já vimos

$$|\vec{B}(0)| = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{\mu_0 e\omega}{4\pi a_0}$$ (substituímos R por a_0, o raio do movimento orbital,

$\boxed{150}$ a) $\vec{J} = \rho \vec{v}$ e $\rho = -e n_e < 0$

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{J}|}{|\rho|} = \frac{i}{l h e n_e}$$



$\vec{E}^m = [\vec{v} \times \vec{B}]$ [Campo induzido devido ao movimento]

$\vec{F}^m = -e\,\vec{E}^m$ [Força de Coulomb]

$$V_A - V_B = \int_A^B (\vec{E}^e \cdot d\vec{p}) = -\int_{\widehat{AB}} \vec{E}^m \cdot d\vec{p}$$

$$V_A - V_B = \int_{\widehat{BA}} (\vec{E}^m \cdot d\vec{p}) = |\vec{E}^m|\, l = |\vec{v}||\vec{B}|\, l$$

$$V_A - V_B = \frac{i}{l h e n_e}|\vec{B}|\, l = \frac{i|\vec{B}|}{e n_e h} > 0 \Rightarrow n_e = \frac{i|\vec{B}|}{(V_A - V_B)|e| h} =$$

$$n_e = \frac{(20A)(1T)}{(7.36\times10^{-6}V)(1.6\times10^{-19}C)(0.2\times10^{-3}m)} = 8.49\times10^{22}\ \text{electrões/cm}^3$$

b) $M_r = 63.54\ g/mol$ [massa atómica do Cobre]

$\rho = 8.96\ g/cm^3$

$N_A = 6.022\times10^{23}$ átomos/mol

Se 6.022×10^{23} átomos — $63.54\ g$

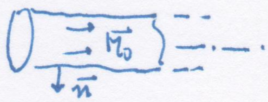
8.49×10^{22} ~~átomos~~ — m $\Rightarrow$ $m = \dfrac{8.49\times10^{22}}{6.022\times10^{23}} \times 63.54\ g$

$m = 8.987\ g$

ou seja, há 8.99 g de electrões/cm³ o que é aproximadamente a quantidade de átomos de Cobre por cm³. Ou seja, há 1 electrão livre por cada átomo de Cobre.

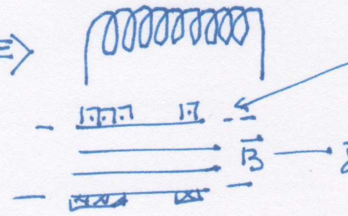
$\boxed{166}$ Iman permanente: (χ_m ~~≠0~~ $= 0$)

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \chi_m \vec{H}$$



Cilindro infinito

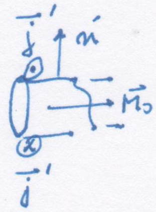
$\Longleftrightarrow$



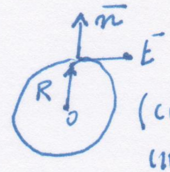
folha de corrente percorrida pela densidade superficial de corrente $\vec{j}\,'$

$$\vec{J}\,' = \text{rot}\, \vec{M}_0$$

$$\vec{j}\,' = [\vec{M}_0 \times \vec{n}]$$



$$\vec{j} = |\vec{M}_0|\,\vec{t}$$



(cil. visto em cross-section)

Mas sabe-se que

$$|\vec{j}| = ni \Rightarrow |\vec{M}_0| = ni$$

logo o solenoide deverá ser percorrido pela corrente $i = \dfrac{|\vec{M}_0|}{n}$